

ROMÂNIA

Liceul Louis-le-Grand, test pentru admiterea in clasa pregatitoare cu profil

MPSI, sesiunea 2015

Durata testului : 4 ore

Exercițiile următoare pot fi abordate in ordine aleatorie. Utilizarea calculatoarelor este interzisă.

Exercițiul 1. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2-t^n} dt$. Demonstrați că șirul (u_n) converge și găsiți limita acestuia.

Exercițiul 2. Fie $f(x) = (\sin x)^3$.

- Calculați $f^{(10)}(0)$.
- Calculați $f^{(11)}(0)$.

Exercițiul 3. Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că 9 nu divide $7^n + n^3$.

Exercițiul 4.

- Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $xe^{nx} = 1$ admite o soluție unică reală. O notăm x_n .
- Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.
- Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ tinde la zero.

Exercițiul 5. Calculați $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercițiul 6. Fie H mulțimea punctelor planului $M(x,y)$ al planului \mathbb{R}^2 , astfel încât $x^2 + xy - y^2 = 1$. Demonstrați că nu exista un dreptunghi cu laturile paralele cu axele și cu vârfurile situate pe H .

Exercițiul 7. Fie $n \geq 2$. Considerăm familiile având n copii, cu echiprobabilitatea sexelor lor (băiat sau fată). Fie A evenimentul " familia are cel mult o fată" și B evenimentul "familia are cel puțin o fată și un băiat ". Dați o condiție necesară și suficientă pentru n astfel încât evenimentele A și B să fie independente.

Exercițiul 8. Fie $a \in \mathbb{R}$ și, pentru $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{k=1}^{99} \frac{\sin kx}{k^2}$. Demonstrați că ecuația $f(x) = a$ admite cel mult 99 de soluții în $[0, \pi]$.

Exercițiul 9. Determinați toate funcțiile f , derivabile pe \mathbb{R} și cu valori reale, astfel încât

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + f(y)) = f(y + f(x)).$$

Exercițiul 10. Fie $a \in \mathbb{N}$. Presupunem că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât n divide $x^2 - a$. Demonstrați că există $b \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b^2$.